Посвящается 200-летию
Казанского университета

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 13

Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач

Материалы всероссийской молодежной научной школы–конференции
(Казань, 19 – 23 ноября 2001 г.)

КАЗАНЬ
Издательство «ДАС»
2001

Казанское математическое общество
Российская Федерация,
Татарстан, 420008, Казань,
Университетская, 17
НИИ математики и механики
им. Н.Г.Чеботарева
Казанского государственного
университета

Kazan Mathematical Society
Chebotarev Institute of
Mathematics and Mechanics
Kazan State University
17, Universitetskaya str.
Kazan, Tatarstan,
420008,
Russian Federation

e-mail: kmf@ksu.ru

РФФИ

Российский фонд фундаментальных исследований

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-10124) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 242 направления 1.6)

УДК 519.6
ББК 22.19
Т78

Научные редакторы: А.М. Елизаров, А.В. Лапин
Составитель: М.А. Игнатьева

Т78 Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.13/ Казанское математическое общество. ***Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач//Материалы всероссийской молодежной научной школы-конференции.*** – Казань: Издательство «ДАС», 2001. – 269 с.

ISBN 5-8185-0050-0

Сборник содержит материалы всероссийской молодежной научной школы-конференции «Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач», проведенной в Казани с 19 по 23 ноября 2001 года Казанским и Московским государственными университетами и Институтом вычислительной математики РАН.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в области численного анализа и интересующихся приложениями вычислительных методов в механике.

УДК 519.6
ББК 22.19

ISBN 5-8185-0050-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит материалы Всероссийской школы-конференции „Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач", проведенной Московским и Казанским государственными университетами на базе НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева с 19 по 24 ноября 2001 г. в Казани. Школа стала очередным научным мероприятием, организованным Математическим Центром им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета при участии Казанского математического общества — второй школой по численному анализу. Предыдущая школа проходила в Казани с 26 сентября по 1 октября 1999 г., ее материалы опубликованы в издании „Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.2. Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач: Материалы Всероссийской молодежной школы-конференции. - Казань: Изд-во „УНИПРЕСС", 1999. - 257 с."

Лекторами Школы выступили ведущие специалисты высших учебных заведений и академических институтов России, участниками Школы стали молодые ученые, аспиранты и студенты старших курсов из различных городов. В период работы Школы были прочитаны лекции по актуальным направлениям вычислительной математики, сделаны обзорные и оригинальные доклады по теории и применению численных методов к решению краевых задач для дифференциальных уравнений и задач со свободными границами, продемонстрирована работа созданных программных комплексов. Во время семинаров и научных дискуссий были обсуждены важнейшие проблемы в области разработки, исследования и реализации численных алгоритмов, их применения для решения задач механики и физики.

Развитие вычислительной техники и программного обеспечения, с одной стороны, и постоянно возрастающие требования к точности и скорости решения, с другой стороны, мотивируют активную разработку численных алгоритмов и их применение к решению прикладных задач. Участие молодых ученых и студентов в работе Школы должно послужить стимулом к освоению ими новых методов и вычислительных средств, к научной работе в области создания и обоснования методов и алгоритмов решения линейных и нелинейных краевых задач.

Председатель Оргкомитета,
академик РАН

Н.С. Бахвалов

РАСЧЁТ МОДЕЛИ ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ DUMKA

Д.В. Чижиков
Московский физико-технический институт

1 Введение

В данной работе будем следовать теории узконаправленного приближения, которая получена Захаровым и Смилгой (1981) и исследована Заславским (1989) для модели ветрового волнения.

Основные черты модели ветрового волнения [1]:

1. раздельное описание ветровых и волновых полей;
2. принципиально новая аналитическая аппроксимация нелинейного эволюционного члена;
3. новое описание диссипационных процессов в ветровых волнах, основанное на идее нелинейного блокировочного спектра.

2 Математическая модель ветрового волнения

Основой волнового блока модели служит уравнение переноса действия в спектральной форме:

$$\frac{\partial N(\omega,\theta)}{\partial t}+\frac{\partial c_\varphi N(\omega,\theta)}{\partial \varphi}+\frac{\partial c_\vartheta N(\omega,\theta)}{\partial \vartheta}+\frac{\partial c_\theta N(\omega,\theta)}{\partial \theta}=P(\omega,\theta), \quad (1)$$

где φ и ϑ – сферические координаты-углы,

$$c_\varphi=c_g\frac{\sin\theta}{r},\quad c_\vartheta=c_g\frac{\cos\theta}{r\cos\varphi},\quad c_\theta=-c_g\frac{tg\varphi\cos\theta}{r},\quad c_g=\frac{g}{2\omega}.$$

r – радиус Земли, P – функция источников и стоков, включающая функцию взаимодействия волн и ветра (P^+), нелинейные взаимодействия в спектре ветровых волн $(P\pm)$ и диссипацию (P^-).

Для описания нелинейных взаимодействий используется теория узконаправленного приближения волнового спектра [3]. В рамках этой теории от двухмерного спектра $N(\omega,\theta)$ переходят к

двум интегральным функциям – спектру волновых чисел $\overline{N}(k_x)$ и параметру узконаправленности $\Delta(k_x)$:

$$N\left(\vec{k}\right)=N(\omega,\theta)/\left(k\frac{d\omega(k)}{dk}\right), \quad (2)$$

$$\overline{N}(k_x)=\int N\left(\vec{k}\right)dk_y, \quad (3)$$

$$\Delta(k_x)=\int k_y^2 N\left(\vec{k}\right)dk_y/(\overline{N}(k_x)k_x^2), \quad (4)$$

где k_y – координата в пространстве волновых чисел, перпендикулярная k_x, а направление k_x совпадает с направлением ветра.

Для описания диссипации используется представление о блокировочном интервале спектра. Блокировочный спектр найден как точное решение приближенного кинетического уравнения для стационарного случая, когда кинетический интеграл равен нулю. Дополнительно предполагается, что если текущий спектр меньше, чем уровень блокировочного спектра, то диссипация отсутствует. Но когда текущий спектр достигает уровня блокировочного спектра, диссипационный член просто уничтожает входной член. Такой подход позволяет преодолеть все трудности параметризации диссипационного члена. Считается, что рост спектральной плотности волнового действия невозможен выше блокировочного спектра.

3 Постановка задачи ветрового волнения

Подлежащие решению уравнения модели узконаправленного приближения имеет вид

$$\frac{d\overline{N}}{dt}=\overline{P}^0(k_x)+\overline{P}^+(k_x)-\overline{P}^-(k_x), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta\overline{N})=\overline{R}^0(k_x)+\overline{R}^+(k_x)-\overline{R}^-(k_x), \quad (6)$$

$$\ldots) = \frac{\partial\overline{N}(k_x)}{\partial t}=a_1\frac{\partial}{\partial k_x}\left(\ln[\Delta^{-1}(k_x)]\frac{\partial}{\partial k_x}\left[\Delta(k_x)k_x^{19/2}\overline{N}^3(k_x)\right]\right), \quad (7)$$

$$\overline{R}^0(k_x) = \frac{\partial(\Delta\overline{N})}{\partial t} = a_2 \ln[\Delta^{-1}(k_x)]\Delta(k_x)k_x^{15/2}\overline{N}^3(k_x), \tag{8}$$

$$\overline{P}^+(k_x) = \int P^+\left(\vec{k}\right) dk_y = \beta\omega(k_x)\overline{N}(k_x), \tag{9}$$

$$\overline{P}^-(k_x) = \int P^-\left(\vec{k}\right) dk_y = \alpha\overline{N}(k_x), \tag{10}$$

$$\overline{R}^+(k_x) = \int k_y^2 P^+\left(\vec{k}\right) dk_y = \beta\omega(k_x)\overline{N}(k_x)\Delta(k_x), \tag{11}$$

$$\overline{R}^-(k_x) = \int k_y^2 P^-\left(\vec{k}\right) dk_y = \alpha\overline{N}(k_x)\Delta(k_x) \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\overline{N}(k_x)\big|_{k_b} = C_\Delta g^{-5/6}U_a^{2/3}k_b^{-19/6}, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial\overline{N}(k_x)}{\partial k_x}\right|_{k_b} = -\frac{19}{6}C_\Delta g^{-5/6}U_a^{2/3}k_b^{-25/6}, \tag{14}$$

$$\Delta(k_x)|_{k_b} = \Delta_{k_b} = 0.3 \tag{15}$$

и начальными данными

$$\overline{N}(k_x)\big|_{t=0} = \overline{N}_0(k_x), \tag{16}$$

$$\Delta(k_x)|_{t=0} = \Delta_0(k_x). \tag{17}$$

Используя предположение, что $\overline{P}^-(k_x) = \overline{P}^+(k_x)$ при $k_x > k_b$ (следовательно, и $\overline{R}^-(k_x) = \overline{R}^+(k_x)$), будем решать уравнения

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = B_N, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta\overline{N}) = B_\Delta \tag{19}$$

с граничными условиями (13) - (15) и начальными данными (16), (17), где $B_N \equiv \overline{P}^0(k_x)$ и $B_\Delta \equiv \overline{R}^0(k_x)$ задаются формулами (7) и (8) соответственно.

4 Цель работы

Цель данной работы - оптимальное улучшение фортран-программы для ЭВМ CRAY, численно решающей уравнения модели ветрового волнения. Для этого было необходимо:

1. применить схему более высокого (третьего) порядка локальной аппроксимации по времени;
2. вычислить собственные значения матрицы Якоби для оценки числа Куранта задачи;
3. преобразовать правую часть для более быстрых вычислений.

5 Аппроксимация правых частей уравнений по пространству k_x

Используется следующая схема

$$(B_N)_i = a_1\frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{[(k_x)_{i+1} - (k_x)_{i-1}]/2}, \tag{20}$$

$$(B_\Delta)_i = a_2 (k_x)_i{}^{15/2} y_i^3 \Delta_i \ln\Delta_i^{-1}, \tag{21}$$

где

$$f_{i+1/2} = \frac{d_{i+1/2}\left[a_{i+1}\Delta_{i+1}y_{i+1}^3 - a_i\Delta_i y_i^3\right]}{(k_x)_{i+1} - (k_x)_i}, \tag{22}$$

$$d_{i+1/2} = \frac{2\ln\Delta_{i+1}^{-1}\ln\Delta_i^{-1}}{\ln\Delta_{i+1}^{-1} + \ln\Delta_i^{-1}} \tag{22.1}$$

ли

$$d_{i+1/2} = \frac{\ln\Delta_{i+1}^{-1} + \ln\Delta_i^{-1}}{2}, \tag{22.2}$$

$\Delta_i = \Delta((k_x)_i)$, $a_i = (k_x)_i{}^{19/2}$, $y_i = \overline{N}((k_x)_i)$.

Заменив в (18) нелинейный дифференциальный оператор вто-го порядка (7) разностным оператором (20), получим задачу ши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений ода прямых:

$$y_i^0 = \overline{N}_0(k_x), i = \overline{0, m},$$

$$y_0 = C_\Delta g^{-5/6} U_a^{2/3} k_b^{-19/6},$$

$$\frac{y_1 - y_0}{(k_x)_1 - (k_x)_0} = -\frac{19}{6} C_\Delta g^{-5/6} U_a^{2/3} k_b^{-25/6},$$

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_i = (B_N)_i, i = \overline{2,m}. \tag{23}$$

Заменив в (19) нелинейный оператор (8) разностным оператором (21), получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых:

$$\Delta_i^0 = \Delta_0(k_x), i = \overline{0,m}, \quad \Delta_0 = \Delta_{k_b},$$

$$\left[\frac{d(\Delta y)}{dt}\right]_i = (B_\Delta)_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{24}$$

Задачи (23), (24) будем решать при $0 \le t \le T = 900$ программой **DUMKA**.

6 Оценка собственных значений матрицы Якоби задачи

Матрица Якоби J задачи имеет вид

$$(J)_{ij} = \frac{\partial (B_N)_i}{\partial y_j}, \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{25.1}$$

$$(J)_{i+m,j+m} = \frac{\partial (B_\Delta)_i}{\partial \Delta_j}, \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{25.2}$$

Применив теорему Гершгорина, оценим максимальное по модулю отрицательное собственное значение матрицы Якоби:

$$\lambda_* = \min\,[\max_i \sum_j |(J)_{ij}|, \max_j \sum_i |(J)_{ij}|]. \tag{26}$$

Определим число Куранта

$$COU = 2/\lambda_*. \tag{27}$$

7 Результаты

В данной работе:

1. увеличены шаги интегрирования по времени как результат применения схемы третьего порядка локальной аппроксимации;
2. вычислено число Куранта;
3. скорректирована аппроксимационная схема правой части, улучшен вид правой части за счет уменьшения количества действий.

Выполнен цикл расчётов с изменением генерального направления распространения волн. Сравнены рассчитанные (численно) и измеренные (экспериментально) величины $S(\omega) = \int_0^{2\pi} S(\omega,\theta)\,d\theta$ (где $S(\omega,\theta) = N(\omega,\theta)\omega$) и $\Delta(\omega)$. Численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными.

Литература

[1] Zakharov V.E., Zaslavskii M.M., Kabatchenko I.M., Matushevskii G.V., Polnikov V.G. *Conceptually new wind-wave model.*

[2] Yan L. *An improved wind input source term for third generation ocean wave modelling*//Royal Dutch Meteor. Inst. Rep. No 87-8. - 1987. - 20 p.

[3] Захаров В.Е., Смилга А.В. *О квазиодномерных спектрах слабой турбулентности*// Ж. экспериментальной и теоретической физики. - 1981. - Т. 21. - С. 1318-1326.

[4] Hasselman D., Dunkel M., Ewing J. *Directional wave spectra observed during JONSWAP(1973)*//J. Phys. Ocean. - 1980. - V. 10. - P. 1264-1280.

[5] Лебедев В.И. *Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений*// Препринт ИВМ АН СССР, 1987. - N 177.

[6] Лебедев В.И. *Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений*// Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. - 1989.- Т. 4. - N 2. - С. 111-135.

[7] Лебедев В.И. *Как решать жесткие системы уравнений явными разностными схемами. Численные методы и применения, Ред. Г.И.Марчук.* - CRC Пресс, Boca Raton, Ann Arbor, Лондон, Токио - 1994. - С. 45-80.

[8] Лебедев В.И., Финогенов С.А. *Об использовании упорядоченных чебышевских параметров в итерационных методах*//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1976. - Т. 16. - N 4. - С. 895-907.

[9] Лебедев В.И. *Функциональный анализ и вычислительная математика.* - М.: Физматлит, 2000.

[10] Lebedev V.I. *An introduction to functional analysis and computational mathematics.* - Boston, etc. Birkhäuser, 1996.

FREDHOLM PROPERTY OF THE STRONGLY SINGULAR INTEGRAL OPERATOR FOR AN INHOMOGENEOUS OPTICAL FIBER

E.M. Kartchevski
Kazan State University

The eigenvalue problem for generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber is formulated as a problem for the set of time-harmonic Maxwell's equations with the Sveshnikov-Reichardt condition at infinity in the cross sectional plane. The eigenvalues of this problem are the complex propagation constants on a logarithmic Riemann surface. The original problem is reduced to a strongly singular domain integral equation, which is often used in practice for computation, and it is proved that the operator of the domain integral equation is a Fredholm operator with zero index.

1 Introduction

Optical fibers are dielectric waveguides having various cross-sectional shapes, and where generally the refractive index of the dielectric may vary in the waveguide's cross-section. In recent years research on the natural modes of arbitrarily-shaped dielectric waveguides has been focused on the development of efficient and reliable computational methods. In many papers on numerical methods for dielectric waveguides, the mathematical grounding of the method was frequently neglected, however, useful insight into the encountered difficulties and modal behavior has been discussed (e. g., [1], [2]). The most rigorous efforts were connected with integral equation (IE) formulations. Within this class the domain IE method has the attractive advantage of being applicable to cross-sectionally inhomogeneous dielectric waveguides [3], [4]. A problem with domain IE's is that they are strongly-singular, which previously prevented their use in a mathematical study of the spectrum of the eigenvalues, with the exception of [5] for the purely guided-modes of an inhomogeneous dielectric waveguide. For real-valued propagation constants it was proved in [5] that the operator of the domain IE is semi-Fredholm.

In this paper we formulate the modal eigenvalue problem as a problem for the set of time-harmonic Maxwell's equations with the Reichardt condition at infinity in the cross sectional plane. The eigenvalues of this problem are the complex propagation constants of the natural modes. The original problem is reduced to a strongly singular domain integral equation similar to [3], [4], [5]. We prove that the operator of the domain integral equation is a Fredholm operator with zero index.

2 Statement of the problem

We consider the generalized natural modes of the regular dielectric waveguide. Let the three-dimensional space $\{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\}$ be occupied by an isotropic source-free medium, and let the refractive index be prescribed as a real-valued function $n = n(x_1, x_2)$ independent of the longitudinal coordinate x_3, and equal to a positive constant n_∞ outside a cylinder. The axis of the cylinder is parallel to the x_3-axis, and its cross section is a bounded

Содержание

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES and KAZAN STATE UNIVERSITY

Electronic Journal

Lobachevskii Journal of Mathematics

www.kcn.ru/tat_en/science/ljm/

http:// ljm.ksu.ru

e-mail: ljmedit@ksu.ru

The great mathematician N.I.Lobachevskii, a pioneer in non-Euclidean geometry, is one of the creators of modem mathematical building. His discovery ranks with D.Hilbert's axiomatic systems, H.Poincare's achievements in complex analysis and algebraic topology, A.Einstein's theory of relativity. And "Lobachevskii Journal of Mathematics" has come to provide a high standard publication forum for research in all areas of modem mathematics, and is addressed to professional mathematicians and those who are interested in interactions with other fields of science. As particular attention is given to rapid (three months) publication, researches do not only rely on "Lobachevskii Journal of Mathematics" to keep them informed of current developments, but also use it for publishing their own work.

The contributions are carefully refereed and selected, in the interests of wide mathematical audience, by an editorial board composed of mathematicians whose expertise ranges across the entire spectrum of the field.

An easy electronic access to "Lobachevskii Journal of Mathematics" provides the reader with full information on his personal workstation or computer, the data is available in TeX files.

"Lobachevskii Journal of Mathematics" serving as an accessible publication platform for the researches in all branches of mathematics, is of essential interest for the international readership of professional mathematicians.

Submission of a paper

To submit a new manuscript to LJM: send an e-mail message (the paper in AMS-TeX (amsppt style), LaTeX(article style), AMS-LaTeX(amsart style), with abstract) to ljmedit@ksu.ru with the subject: manuscript.name of a member of board (example: manuscript. Elizarov).

Please, do not send paper to a member of board directly. Your paper is considered as officially received only after it has been submitted to the editorial board.

Copyright

For other information please visit us at

www.kcn.ru/tat_en/science/ljm/

http://ljm.ksu.ru

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИМЕНИ Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 13

Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач

Материалы всероссийской молодежной научной школы–конференции
(Казань, 19 – 23 ноября 2001 г.)

Редакторы: А.М. Елизаров, А.В. Лапин
Корректор: М.А. Игнатьева

Изд. лиц. № 0227 от 10.03.98. Подписано в печать 10.12.01.
Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Таймс».
Усл. печ. л. 16,8. Уч.-изд. л. 17,0. Тираж 170 экз.
Заказ 12/39. Печать ризографическая

Издательство «ДАС»
420008, Казань, Университетская, 17

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО «ДАС»
420008, Казань, Университетская, 17
Тел. 64-69-26