Посвящается 200-летию
Казанского университета

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы второй всероссийской молодежной научной школы-конференции (Казань, 27 июня – 1 июля 2003 года)

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 20

Казань
Казанское математическое общество
2003

Казанское математическое общество
Российская Федерация,
Татарстан, 420008, Казань,
Университетская, 17
НИИ математики и механики
им. Н.Г. Чеботарева
Казанского государственного
университета

Kazan Mathematical Society
Chebotarev Institute of
Mathematics and Mechanics
Kazan State University
17, Universitetskaya str.
Kazan, Tatarstan,
420008,
Russian Federation

e-mail: kmf@ksu.ru

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект № Т0066)

УДК 519.6
ББК 22.19
Т78

Печатается по постановлению Редакционно-издательского
совета Казанского математического общества

Научные редакторы – А. М. Елизаров, А. В. Лапин
Составители – С. М. Авдякова, М . А. Игнатьева

Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 20/ К[illegible]занское математическое общество. *Численные методы решения линейных и не[illegible]нейных краевых задач // Материалы второй всероссийской молодежной научн[illegible] школы-конференции.* – Казань: Издательство Казанского математи-ческого общ[illegible]ства, 2003. – 243 с.

ISBN 5-900975-40-1

Сборник содержит материалы (лекции и доклады участников) всероссийской м[illegible]лодежной научной школы-конференции «Численные методы решения линейных и н[illegible] линейных краевых задач», проведенной в Казани с 27 июня по 1 июля при поддерж[illegible] Федеральной целевой программы «Интеграция» и Академии наук Республики Тат[illegible]стан.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов[illegible] студентов, специализирующихся в области численного анализа и интересующихся чи[illegible]ленными методами и их приложениями в механике.

УДК 519.[illegible]
ББК 22.1[illegible]

ISBN 5-900975-40-1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛУДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ [1]

А.А. Корнев

*Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, г. Москва*

1 Локальная устойчивость полудинамических систем

Рассматривается обобщенная теорема Адамара-Перрона о существовании устойчивого $\mathcal{M}^-$ и неустойчивого $\mathcal{M}^+$ многообразий в окрестности стационарной, возможно, негиперболической точки. Исследуется итерационный метод проектирования на данные многообразия, приводятся условия и оценки скорости сходимости алгоритма. Полученные результаты применяются для системы ОДУ типа Лоренца и одномерного уравнения Чафе-Инфанта.

Существование многообразий. Рассмотрим непрерывное отображение $S(\cdot)$ банахова пространства H с неподвижной точкой $m = S(m)$. Нас интересует качественное поведение отдельных траекторий $S^n(u)$ при $n \to \infty$ с начальными данными u из некоторой окрестности $O(m)$. Известно, что при достаточно общих предположениях в малой окрестности $O(h)$ можно выделить два множества, называемые устойчивым и неустойчивым многообразиями, определяющие общую картину динамики.

Неустойчивым многообразием $\mathcal{M}^+(S,\mathcal{O})$ подмножества $\mathcal{O}$ банахова пространства H (т. н. "исходящий ус Адамара") называется следующее множество:

$$\mathcal{M}^+(S,\mathcal{O}) = \{u_0 \in \mathcal{O} : \exists u_k \in \mathcal{O}, u_k = S(u_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Неустойчивое многообразие играет важную роль [13] при исследовании глобального аттрактора задачи [2, 17, 23].

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 02-05-64901

[11] Boris J.P., Book D.L. *Flux-corrected transport I, SHASTA, a fluid transport algorithm that works* // J. Copmut. Phys. – 1976. – V. 20. – P. 397–431.

[12] Goodman J.B., LeVeque R.J. *On accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws* // Math. Comput. – 1985. – V. 45. – P. 15–21.

[13] Harten A. *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws* // J. Comp. Phys. - 1983. – V. 49. – P. 357–393.

[14] Van Leer B. *Towads the ultimate conservative defference scheme II, Monotonicity and conservation combined in a second order scheme* // J. Copmut. Phys. – 1974. – V. 14. – P. 361–370.

[15] Goodman J.B., LeVeque R.J. *A geometric approach to high-resolution TVD schemes* // SIAM J. Numer. Anal. - 1988. - V. 25 – P. 268–284.

[16] Roe P.L. *Some contributions to the modeling of discontinuous flows* // Lecture Notes in Applied Mathematics. – 1985. – V. 22. – P. 163–193.

ЦЕПОЧКА ТОДЫ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ГЕРОНИМУСА

Д.В. Чижиков

Московский физико-технический институт, г. Москва

1 Введение

Приведем определения, которые используются ниже.

Определение 1.1. *Многочлены* $P_n(z) = \sum_{k=0}^n p_k z^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *называются ортогональными и нормированными (коротко - ортонормированными), если их скалярное произведение* $(P_l, P_n) = \delta_{ln}$, *где в дискретном случае*

$$(P_l, P_n) = \sum_{k=1}^{N} P_l(\lambda_k) P_n(\lambda_k) m_k,$$

а в непрерывном случае

$$(P_l, P_n) = \int_{S_\mu} P_l(\lambda) P_n(\lambda) d\mu(\lambda).$$

Определение 1.2. *Цепочка Тоды (далее — цТ) — система единичных масс, связанных нелинейными пружинками, возвращающая сила которых экспоненциально зависит от растяжения [2].*

Уравнения движения цТ имеют вид

$$\ddot{x}_n = e^{-(x_n - x_{n-1})} - e^{-(x_{n+1} - x_n)}, \ n \in Z.$$

2 Многочлены Геронимуса

В [8] были изучены многочлены $Y_n(z)$, подчиненные трехчленным рекуррентным соотношениям, коэффициенты которых, начиная с некоторого номера s, становятся периодическими с периодом P:

$$Y_{-1} = 0, \ Y_0 = 1, \ Y_n(z) = (z - \alpha_n) Y_{n-1} - \beta_n Y_{n-2},$$

где $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\beta_n\}_1^\infty$ — вещественные числа, такие, что $\beta_n \neq 0$, а при $n \geqslant s+1$, $s \geqslant 0$, где s — заданное целое, они периодичны с периодом P:

$$\alpha_n = a_m, \ \beta_n = l_m, \ n - s = m(\mathrm{mod} P), \ m = 1, \dots, P.$$

Пусть $l = l_1 l_2 \dots l_P > 0$, $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$. В [7] получено распре-[деление] $\sigma(z)$, с которым ортогональны многочлены $Y_n(z)$. Функ-[ци]я $\sigma(z)$ имеет вид $\sigma(z) = \sigma_1(z) + \sigma_2(z)$, где с точностью до мно-[жи]теля $\beta/2$ функция $\sigma_1(z)$ является абсолютно непрерывной ком-[по]нентой и $d\sigma_1(z) = w(z)\,dz$, а функция $\sigma_2(z)$ является функцией [ска]чков.

Формулы для $w(z)$:

$$) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \notin E = \bigcup_{j=1}^{P} [z_{2j-1}, z_{2j}], \\ \dfrac{(-1)^{P-j}\sqrt{4l - q_P^2(z)}}{\pi C(z)}, & \text{если } z \in [z_{2j-1}, z_{2j}], \end{cases},$$

где

$$C(z) = Y_{P+s-1}(z)Y_s(z) - Y_{P+s}(z)Y_{s-1}(z),$$

а z_j – корни уравнения $4l - q_P^2(z) = 0$, в котором

$$q_P(z) = p_P(z) - r_{P-2}(z) = z^P + B_1 z^{P-1} + \dots + B_P.$$

Для построения $q_P(z)$ используются следующие многочлены Геронимуса:

$$p_{-1} = 0,\ p_0 = 1,\ p_n = (z - a_n)p_{n-1} - l_n p_{n-2},\ n = 1, \dots, P,$$

и

$$r_{-1} = 0,\ r_0 = l_1,\ r_n = (z - a_{n+1})r_{n-1} - l_{n+1}r_{n-2},\ n = 1, \dots, P-2.$$

Функция $\sigma_2(z)$ имеет разрывы непрерывности в тех корнях $\tilde{z}_j$ многочлена $C(z)$, для которых при любом $m \geqslant s-1$ выполняется неравенство Геронимуса [8]. Скачки функции $\sigma_2(z)$, то есть концентрированные массы (веса) μ_k распределения $\sigma_2(z)$, равны

$$\mu_k = 2\sqrt{\prod_{j=1}^{2P}(\tilde{z}_j - z_j)\,/C'(\tilde{z}_k)}\,.$$

Многочлены Геронимуса, умноженные на определенные весовые функции, обладают альтернансом. Общие формулы для таких весовых функций приведены в [7].

3 Периодическая цепочка Тоды

Периодическая цепочка Тоды (далее — ПцТ):

$$\ddot{x}_n = e^{-(x_n - x_{n-1})} - e^{-(x_{n+1} - x_n)},\ x_{n+P} = x_n,\ n \in Z,$$

где $P > 1$ — период ПцТ, с начальными данными

$$x_n(0) = x_n^0,\ \dot{x}_n(0) = v_n^0,\ n \in Z.$$

После замены [6]

$$\begin{cases} v_n = \dot{x}_n,\ n \in Z, \\ c_n = e^{-(x_{n+1} - x_n)},\ n \in Z, \end{cases}$$

система уравнений для ПцТ примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v}_n = c_{n-1} - c_n,\ n \in Z, \\ \dot{c}_n = c_n(v_n - v_{n+1}),\ n \in Z, \end{cases}$$

где $c_{n+P} = c_n$, $v_{n+P} = v_n$, с начальными данными $v_n(0) = v_n^0$, $c_n(0) = c_n^0$, $n \in N$.

Рассмотрим один “кусок” (период) ПцТ:

$$\begin{cases} \dot{v}_n = c_{n-1} - c_n,\ n = \overline{1, P}, \\ \dot{c}_n = c_n(v_n - v_{n+1}),\ n = \overline{1, P}, \end{cases}$$

где $c_0 = c_P$, $v_{P+1} = v_1$, с начальными данными $v_n(0) = v_n^0$, $c_n(0) = c_n^0$, $n = \overline{1, P}$.

Матрицы

$$L(t) = \begin{pmatrix} v_1 & \sqrt{c_1} & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c_P} \\ \sqrt{c_1} & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{c_{P-1}} \\ \sqrt{c_P} & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c_{P-1}} & v_P \end{pmatrix},$$

$$M(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{c_1} & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c_P} \\ \sqrt{c_1} & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & -\sqrt{c_{P-1}} \\ -\sqrt{c_P} & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c_{P-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

ляются парой Лакса $\dot{L} = ML - LM$, если c_n, v_n являются решениями ПцТ.

Верно и обратное. Данные утверждения проверяются непо- дственно.

Заметим, что L – самосопряженная матрица, поэтому $Sp(L)$ – спектр L – вещественный [4]. Так как матрица L удовлетворяет соотношению Лакса, то $Sp(L)$ не зависит от t [2].

Пусть $Q_n(\lambda, t)$, $n = \overline{1, P}$, – многочлены степени $n-1$, ассоциированные с матрицей $L(t)$:

$$Q_1 \equiv 1, \; Q_{n+1} = \frac{(\lambda - v_n)Q_n - \sqrt{c_{n-1}}Q_{n-1}}{\sqrt{c_n}}, \; n = \overline{1, P},$$

где $Q_0 \equiv 0$, $c_0 = c_P$. Сделаем следующее преобразование:

$$Y_1 \equiv 1, \; Y_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{c_k}\right) Q_n, \; n = \overline{2, P}.$$

Получим многочлены Геронимуса ($Y_n = Y_n(\lambda, t)$ – многочлен степени $n-1$):

$$Y_1 \equiv 1, \; Y_{n+1} = (\lambda - v_n)Y_n - c_{n-1}Y_{n-1}, \; n = \overline{1, P},$$

где $Y_0 \equiv 0$, $c_0 = c_P$, причем из-за периодичности коэффициентов $\{v_n\}$ и $\{c_n\}$ (решений ПцТ) можно построить многочлен Y_n любой степени, а не только с нулевой до P-й.

Рассмотрим простейший частный случай. Для ПцТ с периодом $P = 2$ запишем формулы для многочленов Геронимуса в виде

$$\left\{\begin{array}{c} Y_0 \equiv 0, \; Y_1 \equiv 1, \\ Y_{n+1} = (\lambda - v_1)Y_n - c_2 Y_{n-1}, \text{ если } n \text{ – нечетное число,} \\ Y_{n+1} = (\lambda - v_2)Y_n - c_1 Y_{n-1}, \text{ если } n \text{ – четное число.} \end{array}\right.$$

При $P = 2$ непрерывный вес, с которым ортогональны многочлены Геронимуса, сосредоточен на двух отрезках $E = [z_1; z_2] \bigcup [z_3; z_4]$, на которых он вычисляется по следующим формулам:

$$w(z) = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{-(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}}{Y_2 Y_3 - Y_4}, & \text{если } z \in [z_1; z_2], \\ 0, & \text{если } z \in (z_2; z_3), \\ \dfrac{\sqrt{-(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}}{Y_2 Y_3 - Y_4}, & \text{если } z \in [z_3; z_4], \end{cases}$$

где z_1, z_2, z_3, z_4 – корни уравнения $q_2^2 - 4c_1c_2 = 0$ для квадратного трехчлена $q_2(z) = z^2 - (v_1 + v_2)z + [v_1v_2 - (c_1 + c_2)]$. Корни z_1, z_2, z_3, z_4 вычисляются по формулам [8]

$$z_{1,2,3,4} = \frac{v_1 + v_2}{2} \mp \frac{\sqrt{(v_1 - v_2)^2 + 4(c_1 \pm 2\sqrt{c_1c_2} + c_2)}}{2}.$$

Весовые функции для получения альтернанса в случае $P = 2$ имеют вид

$$w_{(0)}(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}{c_1c_2Y_1^2 + Y_3^2 - q_2Y_1Y_3}},$$

$$w_{(1)}(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}{c_1c_2Y_2^2 + Y_4^2 - q_2Y_2Y_4}}.$$

Для всех $r \geqslant 2$, $r \in N$, функции $Y_{2r+\nu+1}w_{(\nu)}$, $\nu = 0, 1$, будут иметь на E альтернанс (то есть на E все минимумы и максимумы каждой из этих функций одинаковы по модулю).

4 Устойчивый явный метод для решения цепочки Тоды

Для решения жестких задач Коши предложены явные устойчивые разностные схемы с изменяющимися временными шагами [3]. Алгоритмы схем основаны на свойствах Т-последовательности корней многочленов Чебышева. Оптимальный алгоритм выбора шагов, условия устойчивости которого изучены в [3], обеспечивает значительное увеличение временного шага по сравнению с звестными явными схемами.

В данной работе для численного решения цТ использована ортран-программа **DUMKA** (автор – В.И. Лебедев), которая нована на алгоритме, описанном в [3].

Численные расчеты

ли проведены следующие численные расчеты:

1. Для ПцТ (в общем случае) были построены графики многочленов $Y_n(z,t)$, $n = \overline{1, P+1}$, непрерывного веса $w(z,t)$ и функций
$$m(z,t) = 1 \Big/ \sum_{n=1}^{P+1} Q_n^2(z,t)$$
при $z \in E$. Имеется предположение, что поведение функций $m(z,t)$ и $w(z,t)$ должно быть одинаково.

2. Для ПцТ ($P = 2$) исследованы многочлены Геронимуса $Y_n(z,t)$, n – произвольное число, на двух отрезках, концы которых определяются по приведенным выше формулам. Сравнено поведение дискретной весовой функции $m(z,t)$, с которой ортогональны ортонормированные многочлены $Q_n(z,t)$, и непрерывной весовой функции $w(z,t)$, с которой ортогональны многочлены Геронимуса (каждая из данных весовых функций нормируется по собственному максимуму).

Кроме того, в результате проведения эксперимента были получены случаи индефинитной метрики (см. [7]), с которой ортогональны многочлены Геронимуса. При определенных начальных данных для решений цепочки Тоды эти решения теряют периодичность по параметру (времени), но построенные с помощью этих решений многочлены Геронимуса обладают (после умножения на соответствующие весовые функции) альтернансом, как и в классической теории ортогональных многочленов.

Литература

[1] Никишин Е.М., Сорокин В.Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* – М.: Наука, 1988.

[2] Мозер Ю. *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория.* – Ижевская республиканская типография, Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика", 1999.

[3] Лебедев В.И. *Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений* // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1989. – Т. 4. – № 2. – С. 111–135.

[4] Лебедев В.И. *Функциональный анализ и вычислительная математика.* – М.: Физматлит, 2000.

[5] Ахиезер Н.И. *Классическая проблема моментов.* – М.: Физматлит, 1961.

[6] Аптекарев А.И. *Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода* // Матем. сб. – 1984. – Т. 125. – № 167. – С. 231–258.

[7] Lebedev V.I. *On the solution of inverse problems and trigonometric forms for the Geronimus polynomials. Application to the theory of iterative methods* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2000. – V. 15. – No 1. – P. 73–93.

[8] Геронимус Я.Л. *О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных многочленов* // Записки математического отделения физико-математического факультета ХГУ и Харьковского математического общества. – 1957. – Т. XXV. – С. 87–100.

Содержание

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы
Всероссийской молодежной научной школы-конференции
(Казань, 27 июня – 1 июля 2003 года)

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 20

Научные редакторы – А. М. Елизаров, А. В. Лапин
Составители – С. М. Авдякова, М. А. Игнатьева

Подписано в печать 9.11.03
Бумага офсетная. Формат 60х90 1/16.
Гарнитура «Таймс».
Печ. л. 15,25. Тираж 200 экз.
Заказ 149. Печать ризографическая

Издательство Казанского математического общества
420008, Казань, Университетская, 17

Издательство “Отечество”
420107, Казань, ул.Свердлова, 12.